

## A Música Definida Pela Matemática

Luis Fernando D'Oliveira Montalvão <sup>1</sup>

**Resumo:** O objetivo desse trabalho foi explorar as áreas da música onde a matemática exerce suas leis. Os matemáticos sempre conseguem enxergar alguma lei matemática em qualquer situação. Na música, não foi diferente. O artigo aborda o feito de Pitágoras no estabelecimento de uma escala musical de doze sons, a escala dodecafônica, que ele definiu após muitos estudos, experimentos e análises de proporções sonoras. Essa escala de doze sons é a base de tudo na história da música. E também aponta como o som é produzido, a partir do momento da vibração que causa a movimentação das moléculas de ar a sua volta até chegar aos nossos ouvidos em forma de ondas, quando então as captamos como sons.

**Palavras-chave:** Matemática. Música. Acústica. Formação das notas.

### Introdução

Essa pesquisa visa identificar e esclarecer as principais relações da matemática com a música, além de oferecer uma ideia de como a matemática está presente em todas as coisas, mesmo onde não podemos imaginar.

O começo desse trabalho se deu com a ideia de realizarmos algumas pesquisas para um projeto de iniciação científica ligado à disciplina de Fundamentos do Cálculo. Nossos principais assuntos eram funções, limites, derivadas e integrais. Em uma dessas buscas acerca do conceito de funções, foi encontrado um artigo que relacionava a matemática com a música, indicando que as notas musicais nada mais eram do que uma frequência, um número de vibrações por segundo. E que para essas vibrações, outras vibrações podiam ser associadas, causando assim um efeito que agrada ao nosso ouvido.

---

<sup>1</sup> Luis Fernando D'Oliveira Montalvão é graduando do terceiro semestre do curso de Informática da Faculdade de Tecnologia de Lins (FATEC Lins).  
Professora indicadora do Artigo Mestre Adriana de Bortoli da Faculdade de Tecnologia de Lins do Curso de Informática.

O trabalho inicia-se, portanto, com estudos relacionados à música, explicações de como funcionam os princípios básicos, o que a rege, lhe proporciona base e harmonia, quais são suas leis. No seguimento desse pensamento, será dada ênfase em como são formadas as notas e como nossos ouvidos captam os sons.

Muitos matemáticos recebem destaque nessa área estudada, como Pitágoras, que foi o primeiro filósofo a tratar da relação entre a beleza e os números. Outro matemático muito conhecido que é estudado nessa área é Galileu Galilei, que, como Pitágoras, se interessou pela relação da matemática com a música. Galileu Galilei tentou elaborar algumas teorias sobre a relação harmônica das notas. Essas suas teorias foram dadas como inadequadas com o passar do tempo.

### Uma Breve Introdução a Escalas Musicais

Boa parte dos seres humanos a humanidade conhece a Escala Natural de Dó. Assim ela é formada:

**Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó.**

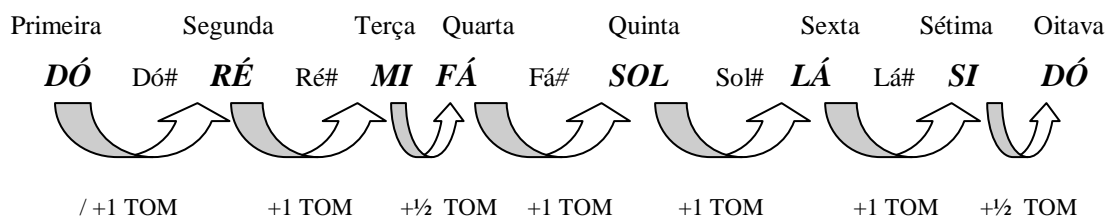
O que muitos desconhecem, é o porquê dessa denominação. O intervalo a seguir serve para acharmos as notas de uma escala e descobriremos os acordes do campo harmônico de determinada nota. Simplificando, a fórmula a seguir mostra por que a escala de Dó é formada daquele modo.

**Figura 1 – Tabela mostrando a construção da escala natural de Dó.**

Formação da escala natural de Dó			
↓ Dó + 1 = Ré	↓ Mi + ½ = Fá	↓ Sol + 1 = Lá	Si + ½ = Dó
↓ Ré + 1 = Mi	↓ Fá + 1 = Sol	↓ Lá + 1 = Si	

Mas, afinal, mais um o quê? Mais um tom, ou seja, Dó mais um tom é igual a Ré, Ré mais um tom é igual a Mi, Mi mais meio tom é igual a Fá, e assim vai.

O esquema a seguir também mostra a escala natural de dó se formando:



Para melhor visualizarmos, podemos imaginar o braço de um violão. Tomando a primeira corda como exemplo, a Mi, se andarmos uma casa, teremos andado meio tom, se andarmos duas casas, teremos andado um tom. Então, se esta corda está solta e devidamente afinada, se a tocarmos, soará a nota Mi. Se a pressionarmos na casa um, teremos andado uma casa, ou seja, meio tom, e então a tocarmos, soará a nota Fá. Mi mais meio tom resulta em Fá, como mostram a tabela e o esquema.

Para acharmos o campo harmônico de determinada nota, adicionamos “menor” na **segunda, terça, sexta e sétima** nota da escala. Assim sendo, o campo harmônico de Dó é:

**Figura 2 – Tabela mostrando o campo harmônico de Dó**

NOTA:	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Escala de Dó:</b>	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
<b>Campo Harmônico:</b>	<b>Dó</b>	<b>Ré menor</b>	<b>Mi menor</b>	<b>Fá</b>	<b>Sol</b>	<b>Lá menor</b>	<b>Si menor</b>	<b>Dó</b>

Quando algum compositor decide fazer uma música, ele precisa decidir o tom em que ela será tocada. Para isso, ele usará aquele intervalo anteriormente mencionado e pegará as notas do **campo harmônico** do tom escolhido, **porque elas se relacionam bem, existe certa harmonia entre elas** (Galileu Galilei afirmava que as oitavas se combinavam e tentou levantar fundamentos para isso, mas não conseguiu um definitivo. As oitavas no caso da tabela são as notas um e oito, Dó e Dó. Hoje, elas são consideradas harmônicas uma com a outra, porém existem outras que se combinam, e não somente as oitavas, como Galileu acreditava).

O campo harmônico traduz na verdade algo que nós sabemos por instinto, por exemplo, quando estamos compondo uma música, instintivamente tentamos achar uma sequência melódica que nos agrada, e nas tentativas, é claro, tocamos sequências de acordes

que parecem não combinar entre si, isso se deve ao fato de que existe uma sequência de acordes que se combinam, existe, portanto uma sequência melódica.

Além da oitava e da quinta, outros intervalos de sons também são considerados esteticamente consonantes pela maioria dos autores. Cabe ressaltar que os intervalos em questão foram representados por suas relações matemáticas no que diz respeito à relação harmônica.

As harmonias fundamentais, resultantes de relações que são as mais simples e mais facilmente perceptíveis, são o dobro, o triplo, o quádruplo (isto é, algumas oitavas acima), a unidade mais a metade ( $1+1/2 = 3/2$ ), ou seja, o intervalo de quinta (que é a nota Sol, por exemplo, na escala de Dó), a unidade mais o terço ( $1+1/3 = 4/3$ ), que é a relação de quarta (que é a nota Fá na escala de Dó).

Os sons agradáveis ao ouvido correspondem a números proporcionados, e esses números e proporções seriam a causa da beleza musical. Quanto mais a relação numérica é simples, mais harmonioso é o intervalo, mais facilmente o ouvido capta a harmonia, e mais rapidamente a razão a compreende.

Isso explica porque a maioria das músicas segue o padrão; “Primeira”, “Quinta”, “Quarta”, etc.

Exemplo: música Será – Legião Urbana: tom de dó – Os acordes Dó, Sol, Fá, Lá menor proporcionam a grande base da música.

A música Maluco Beleza, do Raul Seixas, é tocada no tom de **Dó**, com os seguintes acordes: Dó, Sol, Lá menor, Fá, Ré menor, e **Mi**.

No campo harmônico de Dó, não existe Mi, veja:

**Figura3 – Tabela mostrando o campo harmônico de Dó**

NOTA:	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Campo Harmônico:</b>	<b>Dó</b>	<b>Ré menor</b>	<b>MI MENOR</b>	<b>Fá</b>	<b>Sol</b>	<b>Lá menor</b>	<b>Si menor</b>	<b>Dó</b>

Isso se chama **empréstimo modal**, ou seja, o tom da música é Dó, e, sendo que ele não possui Mi em seu campo harmônico, “pega emprestado” de algum outro, já que produz um som agradável em determinada combinação.

### Como é Produzida a Nota?

Do ponto-de-vista acústico, os sons utilizados para produção de música (excetuando os sons de alguns instrumentos de percussão) possuem determinadas características físicas, tais como oscilações bem definidas (frequências) e presença de harmônicos.

Apesar das diferenças entre uma filarmônica e um show de rock, ambos têm a mesma base: a escala

a escala musical. Além da beleza das músicas que pode produzir, a seqüência **dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó** guarda dentro de si as **relações matemáticas**, associadas ao som correspondente a cada nota musical.

A música é a arte dos sons e a consonância das ondas sonoras é o que torna possível a música na nossa vida. As regras para se combinar sons consonantes são bem conhecidas, tendo sido estabelecidas ao longo da evolução da música. Os elementos básicos são as notas e os intervalos entre as notas, cujas propriedades principais são a frequência (da nota) e a consonância (do intervalo). Se duas notas musicais tem frequências  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente, o intervalo entre estas notas é definido pela relação  $r = f_2 : f_1$ . Embora a frequência seja uma grandeza contínua, a música é composta por sons consonantes, sendo que os intervalos de interesse musical se manifestam como frações de uma oitava, assim chamada por conter oito notas (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, Dó) dentro do intervalo de frequência  $f$  (Dó) :  $f$  (dó) = 2.

O som é produzido por objetos em vibração como, por exemplo, as hastes de um diapasão, o diafragma de um alto-falante ou ainda uma corda esticada e depois dedilhada. Ela vibra e produz um som. Mas nem sempre o que nós ouvimos pode ser considerado um som, ele pode ser assim dividido:

**“Som” é o resultado de uma frequência constante, ou seja, uma vibração regular.**

**“Ruído” é o resultado de uma frequência não constante, ou seja, irregular.**

A percepção que nossos ouvidos têm em relação ao som depende do número de vibrações por segundo. Para melhor demonstrar isso, tomaremos um violão. A nota é

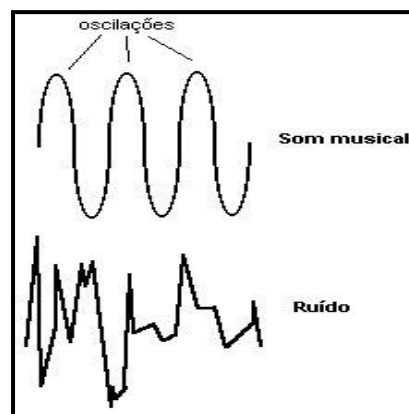


Figura 4: Definição gráfica som e ruído

diferenciada pelo número de vibrações da corda. A esse número de vibrações damos o nome de frequência ou tom. **A escala musical corresponde, na realidade, a um conjunto de**

**frequências que identificam as diversas notas musicais.** Concluindo, todo e qualquer barulho é uma nota, e sua classificação dependerá do número de vibrações.

Vamos considerar como ponto de partida, a nota produzida por uma corda que vibre 256 vezes por segundo e chamá-la de dó. Se cortarmos a corda ao meio ela passará a vibrar duas vezes mais depressa e a nota produzida também será um dó, porém com a frequência de 512 vibrações por segundo, ou seja, uma oitava mais alta. **O intervalo entre dois dós consecutivos contém as outras notas musicais. A esse conjunto de notas de dó a dó chama-se escala musical. Assim, é fácil perceber que temos várias escalas musicais que se diferenciam por tons mais graves e agudos.**

Sabe-se que o ouvido humano é sensível a sons emitidos com a frequência entre 16 (alguns autores afirmam ser 20) e 20.000 Hz – Hertz ou ondas (vibrações) por segundo. As oscilações abaixo dessa faixa são chamadas de "sub-sônicas" ou "infra-sônicas", enquanto que as acima da faixa são chamadas de "ultra-som".

Segundo Ratton, (2010, p.1) "Para poder detectar os sons, o ouvido possui um mecanismo bastante complexo, que envolve ossículos, cavidades e milhares de nervos. O elemento principal na detecção das oscilações dos sons é a "cóclea", uma pequena estrutura em espiral que atua seletivamente. Ao longo dela, existem milhares de fibras nervosas que agem como sensores, e transferem ao cérebro a percepção das oscilações e intensidade dos sons. Assim, um som com determinada oscilação excita sempre apenas uma determinada região de fibras nervosas da cóclea".

É essa característica exata da percepção do som pelo ouvido que faz com que a Música seja uma arte mais baseada em condições fisiológicas do que em psicológicas, isto é, a percepção musical é mais uma questão de sensação (orgânica) do que de razão (ação intelectual). Ou seja, mesmo que quiséssemos recriar a concepção de sons musicais, isso seria impossível, por causa da forma fisiológica como percebemos os sons.

A tabela a seguir mostra o **número de frequências de notas musicais audíveis** nesse intervalo (tomando a escala de Dó como exemplo).

**Figura 5 – Vibrações por segundo, tendo Dó como exemplo.**

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si
16	18	20	21,3	24	26,7	30
32	36	40	42,6	48	53,4	60
64	72	80	85,2	96	106,8	120
128	144	160	170,5	192	213,5	240
256	288	320	341	384	427	480
512	576	640	682	768	854	960
1.024	1.152	1.280	1.364	1.536	1.708	1.920
2.048	2.304	2.560	2.728	3.072	3.416	3.840
4.096	4.608	5.120	5.456	6.144	6.832	7.680
8.192	9.216	10.240	10.912	12.288	13.664	15.360
16.384	18.432					

### As Razões da Matemática que Determinam as Notas Musicais

Aí entra a matemática. Se a nota Dó soar 16 vezes por segundo, como na tabela, Ré soará 18. A razão de uma nota para sua segunda na escala é: **9/8** (nove oitavos do valor das vibrações). Veja:

Razão de Dó para Ré: **9/8 (Primeira para segunda)**

$$16 (\text{Dó}) \times \frac{9}{8} = 18 (\text{Ré}, 18 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Mi: **5/4 (Primeira para terça)**

$$16 \times \frac{5}{4} = 20 (\text{Mi}, 20 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Fá: **4/3 (Primeira para quarta)**

$$16 \times \frac{4}{3} = 21,33 (\text{Fá}, 21,33 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Sol: **3/2 (Primeira para quinta)**

$$16 \times \frac{3}{2} = 24 (\text{Sol}, 24 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Lá: **5/3 (Primeira para sexta)**

$$16 \times \frac{5}{3} = 26,7 (\text{Lá}, 26,7 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Si: **15/8 (Primeira para sétima)**

$$16 \times \frac{15}{8} = 30 (\text{Si}, 30 \text{ vibrações por segundo}).$$

Razão de Dó para Dó, uma oitava acima: **2 (Primeira para oitava)**

$$16 \times 2 = 32 (\text{Dó}, 32 \text{ vibrações por segundo}).$$

## **Pitágoras X Relação Beleza Através de Números – O Estabelecimento da Escala Dodecafônica**

Pitágoras foi quem primeiro **estabeleceu uma escala de sons adequados ao uso musical**, formando uma série a partir da fração de  $\frac{2}{3}$  (que corresponde ao intervalo musical chamado de "quinta"). Usando uma sucessão de "quintas", ele conseguiu definir doze notas musicais, sendo sete "naturais" (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si) e mais cinco "acidentes": Dó#, Ré#, Fá#, Sol#, e Lá# (o símbolo # é chamado de "sustenido"). Essa escala, com doze notas, é chamada dodecafônica, e é usada praticamente no mundo todo. Porém existem certas civilizações que não a utilizam, como a chinesa por exemplo.

Pitágoras descobriu em que proporções uma corda deve ser dividida para a obtenção das notas musicais no início, sem altura definida, sendo **uma tomada como fundamental** (pensemos numa longa corda presa a duas extremidades que, quando tangida, nos dará o som mais grave) e a partir dela, gerar-se-á **a quinta e terça** através da reverberação harmônica. Os sons harmônicos. **Prendendo-se a metade da corda, depois a terça parte e depois a quinta parte conseguiremos os intervalos de quinta e terça em relação à fundamental.** A chamada série harmônica. À medida que subdividimos a corda obtemos sons mais altos e os intervalos serão diferentes. E assim sucessivamente. Descobriu ainda que frações simples das notas, tocadas juntamente com a nota original, produzem sons agradáveis. Já as frações mais complicadas, tocadas com a nota original, produzem sons desagradáveis.

### **Conclusão**

Através desse estudo, pode-se concluir que a matemática realmente sempre está ao nosso redor, invisível e constante, em todas as coisas, inclusive com relação à música, assunto esse que desperta diferentes emoções em todos nós. A insistência e o estudo dos sábios matemáticos sempre trouxeram grandes benefícios para a humanidade, como foi o caso de Pitágoras, que estudou, analisou e padronizou algo que é a base para a história da música mundial. Através de sua criação, a escala dodecafônica, ele abriu várias possibilidades para o estudo da música, que foram aproveitadas por diversos estudiosos, que criaram desta forma um processo evolutivo para a escala.



Durante a realização desse trabalho encontramos muitos elementos matemáticos que estão diretamente envolvidos com os conceitos musicais como, por exemplo, frações. Notamos também que essas relações podem ser citadas e usadas como exemplos inclusive para o ensino de tal conceito.

Também houve a verificação de que diversos povos possuem trabalhos com escalas musicais que de alguma forma formam construídas. O estudo dos tipos de escalas de vários povos como: egípcios, babilônios, gregos e chineses, bem como a origem das mesmas, é nosso próximo objeto de estudo.

### Referências:

<http://www.cifras.com.br/tutorial.asp?cod=358>, acessado em 06-03-10.

<http://www.montfort.org.br/index.php?secao=cadernos&subsecao=arte&artigo=musicabeleza&lang=bra> Acessado em 08-03-10.

<http://www.music-center.com.br/escalas.htm> acessado em 06-03-10.

[www.musicaeadoracao.com.br/...musical/acordes\\_cifras.htm](http://www.musicaeadoracao.com.br/...musical/acordes_cifras.htm) acessado em janeiro de 2010.

[http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/teoria\\_musical/acordes\\_cifras.htm](http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/teoria_musical/acordes_cifras.htm) acessado em 06-03-10.

[www.musicaharmonia.com.br/arquivos/artigos/textos/Audicao.doc](http://www.musicaharmonia.com.br/arquivos/artigos/textos/Audicao.doc) acessado em 06-03-10.

<http://www.ufpa.br/ccen/fisica/biofisica/capit3/capitulo3.html> acessado em 06-03-10.

<http://oikozon.blogspot.com/2009/08/musica-e-matematica-relacao-harmoniosa.html>  
Acessado em 08-03-10.

[http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica\\_matematica.htm](http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica_matematica.htm) Acessado em 08-03-10.

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras> Acessado em 08-03-10.

[http://www.guitarclub.com.br/downloads/fisica\\_musica.pps](http://www.guitarclub.com.br/downloads/fisica_musica.pps) Acessado em março de 2010

PERES, L. *Matemática e Música: Em busca da Harmonia*. Disponível em: [www.somatematica.com.br/mundo/musica.php](http://www.somatematica.com.br/mundo/musica.php). Disponível em 08-03-10.

GOTO, M. *Física e Música em Consonância*. Disponível em: [www.scielo.org](http://www.scielo.org), acessado em 09-06-10.

RATTO, M. *Música e Matemática*. Disponível em: [www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica\\_matematica.htm](http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica_matematica.htm), acessado em: 09-06-10.